別冊③

三次元差分法を用いた
長周期地震動の推計手法

平成２７年１２月

南海トラフの巨大地震モデル検討会
首都直下地震モデル検討会

１．長周期地震動に用いる計算手法

長周期地震動を再現する計算手法は、Graves[1)]やPitarka[2)]、Aoi and Fujiwara[3)]で利用されている３次元有限差分法（以下、３次元差分法）を用いた。図１－１に、３次元差分法の概念図を示す。

３次元差分法は、地震波を発生する震源を、多数の点震源群（複双震源＝ダブル・カップル・フォース）として導入することができる。導入する際は、人為的なパルス列が発生しないよう、スムースな断層破壊を表現するために、計算周期範囲を考慮して配置する必要がある。

更に、３次元差分法では、地震波が伝播する地盤構造の３次元的な不均質性を考慮することができる。これは、地震波が伝播する不均質な地盤構造を、スタッガード・グリッドと呼ばれる不連続格子を用いてモデル化するためである。スタッガード・グリッドによる、不連続格子モデルの概念図を図１―２に示す。

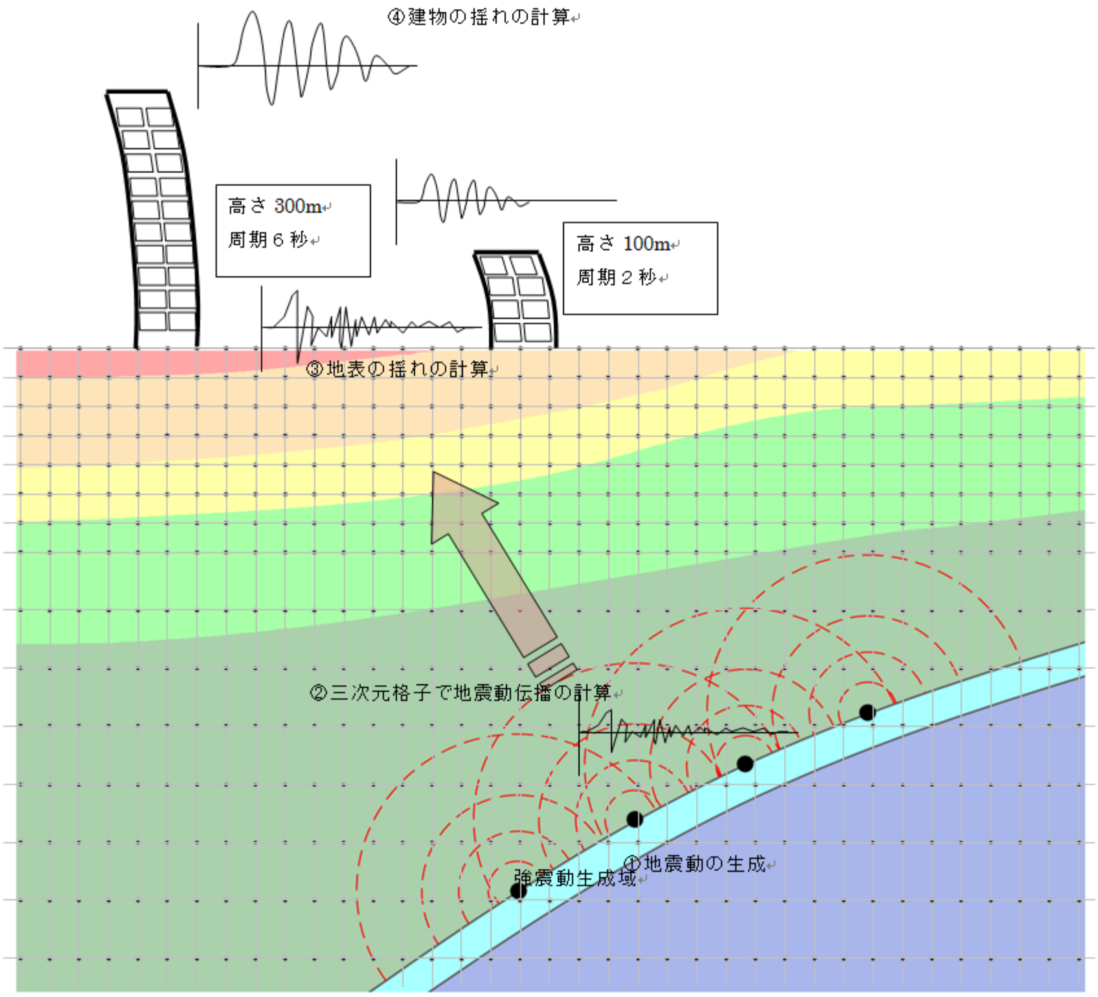


図１―１．３次元差分法の概念図

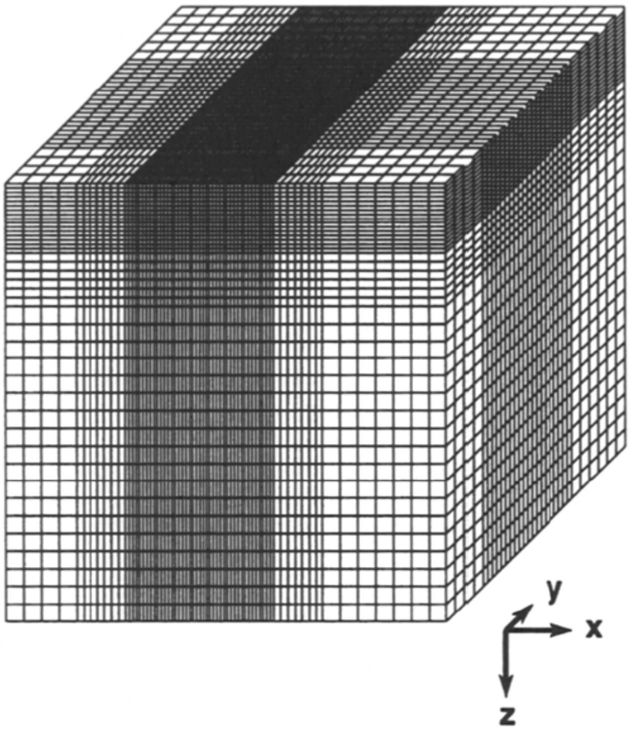


Figure 1. Grid layout with nonuniform spacing.

図１－２　スタッガード・グリッドによる不連続格子モデルの概念図（Pitarka[2)]より抜粋）

スタッガード・グリッドによる不連続格子を用いた地盤構造モデルでは、地震波の波長や、地盤構造の不均質を考慮するため、格子間隔を適切に設定することで、精度の良い計算を、効率よく行うことができる。なお、本検討におけるモデルでは、深さ方向に格子間隔を変えておいる。また、広い領域を計算対象とする際は、PC を複数台利用する並列計算により、計算時間を短縮することができる。3 次元差分法による地震動の計算フローを図１－３に示す。

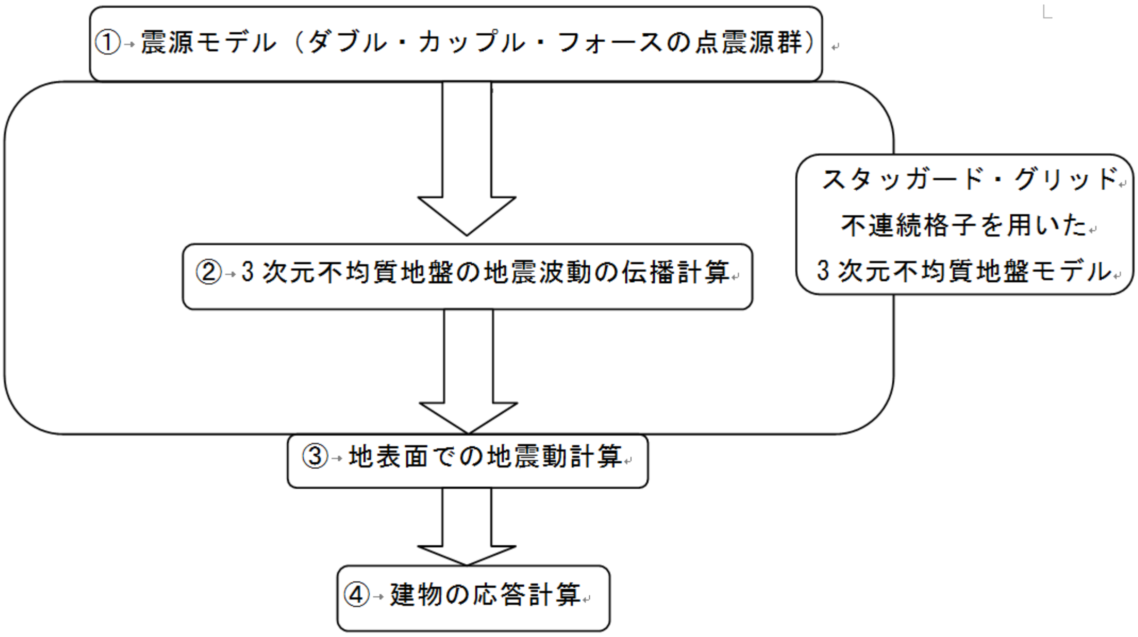


図１－３．3 次元差分法による地震動の計算フロー

（図中番号①から④は、図１－１の図中番号に対応している）

２．スタッガード・グリッドによる 3 次元差分法の概要

3 次元差分法は、空間方向（x, y, z 方向）と時間方向（t 方向）に関して、速度成分 ν と応力 σ の微分方程式を、時間差分近似で解く方法である。今回用いる 3 次元差分法は、広域な長周期地震動の計算を行うため、以下の点を考慮したプログラムとなっている。

1）深部構造の不均質性を簡略化することができるよう、鉛直方向（Z 軸方向）に不等間隔なグリッド配置ができる。そのため、計算の大幅な短縮化ができる。これは、Virieux[4),5)]によって提案されたスタッガード・グリッドを導入しているためである。
2）地盤の減衰を表す Q 値を、P 波と S 波で個別に設定することができる。これは、Robbertson[6)]や Robbertson et al.[7)]によって提案された手法を参考にしているためである。

速度成分 ν と応力成分 σ による、スタッガード・グリッドを用いた波動方程式は、以下のように記述できる。

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{1}{\rho}(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}) \tag{1}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{1}{\rho}(\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}) \tag{2}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{1}{\rho}(\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}) \tag{3}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda\left(\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) \tag{4}$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial v_y}{\partial y} + \lambda\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) \tag{5}$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial v_z}{\partial z} + \lambda\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) \tag{6}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \tag{7}$$

$$\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial t} = \mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \tag{8}$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial t} = \mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial x}\right) \tag{9}$$

式(1)～(9)において、ρは密度、λとμはラメの定数である。式(1)～(3)は、速度νの時間微分が、応力σの勾配成分に依存することを表しており、式(4)～(9)は、応力σの時間微分が、速度νの勾配成分に依存することを表している。すなわち、式(1)～(3)が速度νを求める時間差分の計算、式(4)～(9)が応力σを求める時間差分の計算を示しており、上式(1)～(3)と(4)～(9)を交互に繰返し計算することで、3 次元的に伝播する地震波動の計算を行う。

なお、3 次元差分法の計算では、上述の時間方向のみならず、空間方向にも現れる。

式(1)を、時間差分⊿tで書き直すと、

$$\frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{1}{\rho}(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}) \tag{10}$$

となる。ΔtとΔv_{xx}は、それぞれ時間ステップ幅と x 方向の速度ν_xの微小変化を表している。式(2)～(3)も同様に書き直すことができる。式(10)において、右辺は、ひとつ前の時間ステップで計算済みである。

上述のような時間差分⊿tによる離散化形式の解法は、時間tを陽にしているため、陽解法と言い、直接、方程式を解かずに済むので、大規模領域の 3 次元計算でも、PC の負荷を軽減でき、計算時間を短縮できる利点がある。

空間勾配の離散化は、式(10)の直交応力成分σ xxを用いると、以下の式(11)で表される。

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = \frac{\left(\sigma_{xx}^{i+1} - \sigma_{xx}^{i}\right)}{\Delta x} \tag{11}$$

式(11)において、i は応力格子の x 方向に付けられているインデックスである。Δx は応力の格子間隔を表している。スタッガード・グリッドでは、式(10)の左辺Δv_xが計算される位置にある速度格子が、応力格子に付けられたインデックス i と i+1 の間に存在することになる。図２．１に、3 次元の、速度νと応力σのスタッガード・グリッドの要素格子を示す。

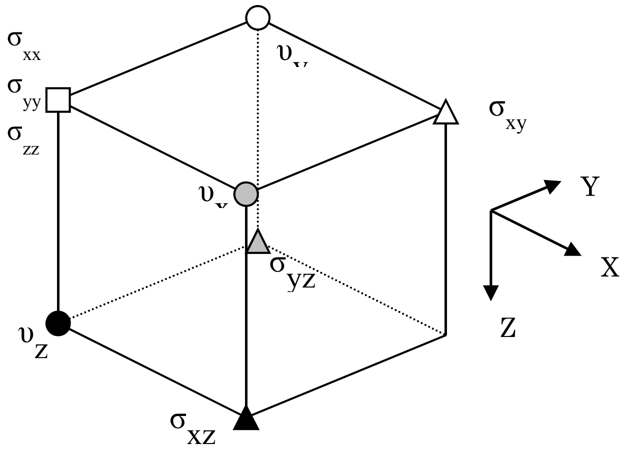


図２．１　速度νと応力σのスタッガード・グリッドの要素格子

図２．１の要素格子によると、速度νと応力σの格子点は互いに隣接しているのが分かる。換言すれば、速度勾配の計算に必要な速度の格子点が、応力の格子点と隣接しているという事である。スタッガード・グリッドを用いた 3 次元差分法では、速度νと応力σの格子点は、上述のように空間的に交互に隣接しており、時間ステップが進むにつれ、両者が更新されて、次の時間ステップの計算へと進む。

時間ステップΔtの半分とした場合の、式(1)～(9)の時間差分を考えると、式(1)～(9)は、以下のように書き直される。

$$v_x^{n+\frac{1}{2}} = v_x^{n-\frac{1}{2}} + \left\{ \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}^n}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^n}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}^n}{\partial z} \right) \right\} \Delta t \tag{12}$$

$$v_y^{n+\frac{1}{2}} = v_y^{n-\frac{1}{2}} + \left\{ \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{yx}^n}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^n}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}^n}{\partial z} \right) \right\} \Delta t \tag{13}$$

$$v_z^{n+\frac{1}{2}} = v_z^{n-\frac{1}{2}} + \left\{ \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{zx}^n}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}^n}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}^n}{\partial z} \right) \right\} \Delta t \tag{14}$$

$$\sigma_{xx}^{n+1} = \sigma_{xx}^n + \left\{ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_x^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial v_y^{n+\frac{1}{2}}}{\partial y} + \frac{\partial v_z^{n+\frac{1}{2}}}{\partial z} \right) \right\} \Delta t \tag{15}$$

$$\sigma_{yy}^{n+1} = \sigma_{yy}^n + \left\{ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_y^{n+\frac{1}{2}}}{\partial y} + \lambda \left(\frac{\partial v_z^{n+\frac{1}{2}}}{\partial z} + \frac{\partial v_x^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} \right) \right\} \Delta t \tag{16}$$

$$\sigma_{zz}^{n+1} = \sigma_{zz}^n + \left\{ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_z^{n+\frac{1}{2}}}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial v_x^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} + \frac{\partial v_y^{n+\frac{1}{2}}}{\partial y} \right) \right\} \Delta t \tag{17}$$

$$\sigma_{xy}^{n+1} = \sigma_{xy}^n + \left\{ \mu \left(\frac{\partial v_x^{n+\frac{1}{2}}}{\partial y} + \frac{\partial v_y^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} \right) \right\} \Delta t \tag{18}$$

$$\sigma_{yz}^{n+1} = \sigma_{yz}^n + \left\{ \mu \left(\frac{\partial v_y^{n+\frac{1}{2}}}{\partial z} + \frac{\partial v_z^{n+\frac{1}{2}}}{\partial y} \right) \right\} \Delta t \tag{19}$$

$$\sigma_{zx}^{n+1} = \sigma_{zx}^n + \left\{ \mu \left(\frac{\partial v_z^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} + \frac{\partial v_x^{n+\frac{1}{2}}}{\partial z} \right) \right\} \Delta t \tag{20}$$

上式(12)～(20)において、n は、経過時間を $n\Delta t$ で表す、時間に付せられるインデックスである。なお、式(11)の x 方向の格子インデックス i とは異なり、ここでは応力σが計算されるステップを n としているので、速度νが計算されるステップのインデックスは、時間 Δt の半分ずれているため $n \pm \frac{1}{2}$ となっている。

地震動計算の場合、計算領域を設定するため、計算境界における処理が必要となる。とりわけ、地表面を表すには、固体である地表面と大気の境界条件を付加する必要がある。3次元差分法による地震動計算では、大気は真空とみなし、地表面は応力が伝わらない自由表面として設定される場合が多い。また、地表面の地形を考慮した計算は、まだ研究段階であることから、地表面は平面として扱われることが多い。今回の計算でも地表面は平面を仮定している。

地表面を平面とした自由表面の境界条件は、次式で表される。

$$\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0\Big|_{Z=0} \tag{21}$$

地表面に露頭している断層による地震外力などを、地表面に作用させる場合は、この条件下で外力を表す項を付加する。

地表面の応力状態を表現するために、z 軸方向の応力勾配、および、速度勾配を必要とする式(12)～(20)において、地表面より上にある格子を使用しないため、同式を変形する必要がある。応力勾配は、以下の解放端反射の条件を用いる。

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = \frac{\sigma_{xz}^{z+1/2} - \sigma_{xz}^{z-1/2}}{\Delta z} = \frac{2\sigma_{xz}^{z+1/2}}{\Delta z} \tag{22}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = \frac{\sigma_{xz}^{z+1/2} - \sigma_{xz}^{z-1/2}}{\Delta z} = \frac{2\sigma_{xz}^{z+1/2}}{\Delta z} \tag{23}$$

応力σの上付きインデックスは、空間格子であることを表す。鉛直下向きに Z 軸を設定した場合、$\sigma^{z-\frac{1}{2}}$ は地表面より上に存在するので参照できないが、解放端反射の条件により鏡像を参照できることを意味している。一方、速度勾配は、応力σの変化が無いことを、式(17)を用いて次式のように表わされる。

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial v_z}{\partial z} + \lambda\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) = 0 \tag{24}$$

式(24)を整理すると

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\lambda}{(\lambda + 2\mu)}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) \tag{25}$$

が得られ、地表面における地震動が求まる。3 次元差分法では、計算結果は速度 ν で出力される。この結果を微分すると加速度が得られ、積分することで変位が求められる。

３．深い地盤構造モデル（３次元速度層モデル）

１章で述べたように、3 次元差分法では、地震波が伝播する地盤構造の 3 次元的な不均質性を考慮することができる。したがって、推計する長周期地震動の精度を高くするためには、不均質な地盤構造を精度よく構築することが重要となる。地震動の水平動と上下動の観測記録を比較すると、堅固な地盤では水平動と上下動が同程度であるのに対し、柔らかい地盤では水平動が上下動に比べて大きくなっている。これは、深い地盤の固有周期に対応する周期の表面波が増幅する特性によるものと考えられている。これより、本両検討会における震度分布及び津波高等のこれまでの検討では、地震調査研究推進本部から公開されている「全国一次地下構造モデル（暫定版）」[8)]を基にして、水平動（H）と上下動

（V）の周期ごとの振幅比（H/V スペクトル）の観測値に合致するよう首都圏及び中部圏の地盤構造モデルを修正している。

本検討においても、これまでの修正方法を用いて、四国及び東海地域など図３－１に示す地域の観測データを点検し、深部地盤モデルの修正を行った。主な地点のH/V スペクトルによる地盤モデルの修正結果を図３－２に示す。図３－３には、観測記録のH/V スペクトルと地盤モデルから計算されるH/V スペクトルそれぞれの卓越周期の相関図を地盤モデルの修正前と修正後について示す。修正後の地盤モデルは、概ね観測記録の卓越周期を説明することが分かる。また、地盤構造モデル修正前後の速度層上面深度分布を図３－４に、中央防災会議2007 年モデルからの変更履歴を比較した断面図を図３－５に示す。

なお、地域毎に観測される地震波形の卓越周期は、地盤の一次固有周期と相関が高いことが中央防災会議のこれまでの検討会で確認されている。本検討で用いる地盤構造モデルから計算した地盤の一次固有周期は、図３－６に示すとおりであり、地域毎に卓越しやすい地震動の周期を把握することができる。

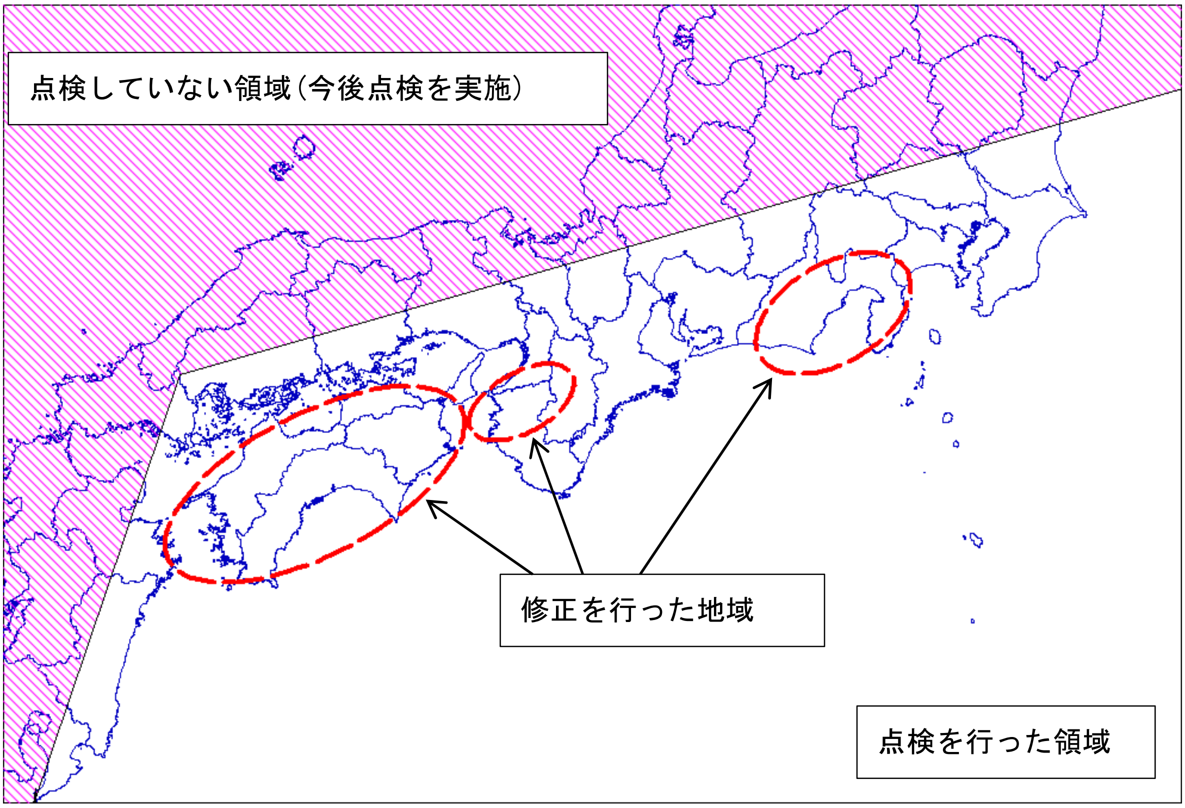


図３－１．地盤構造モデルの修正を行った地域

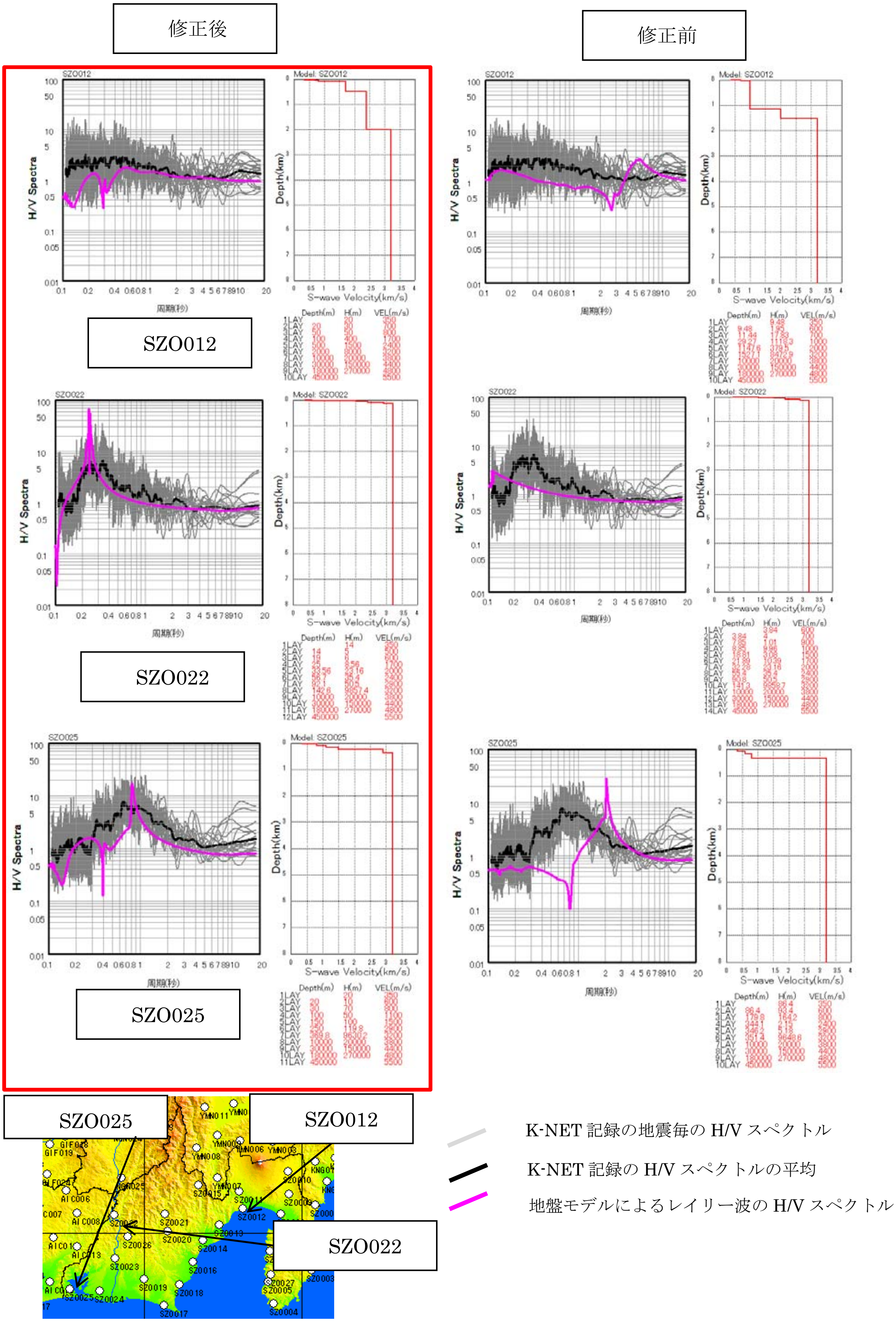


図３－２（１）．静岡県における修正前後のＨ／Ｖスペクトル例

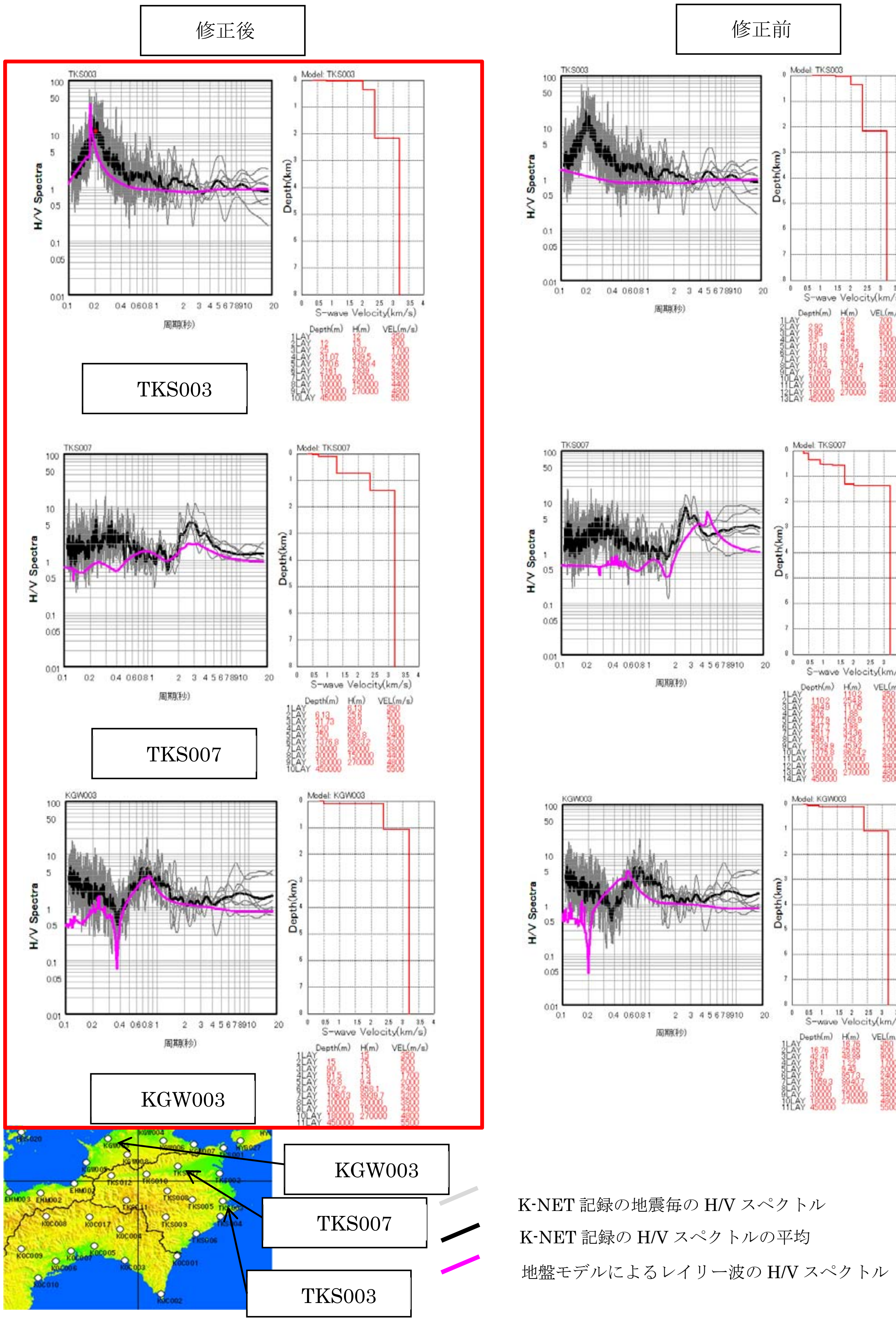
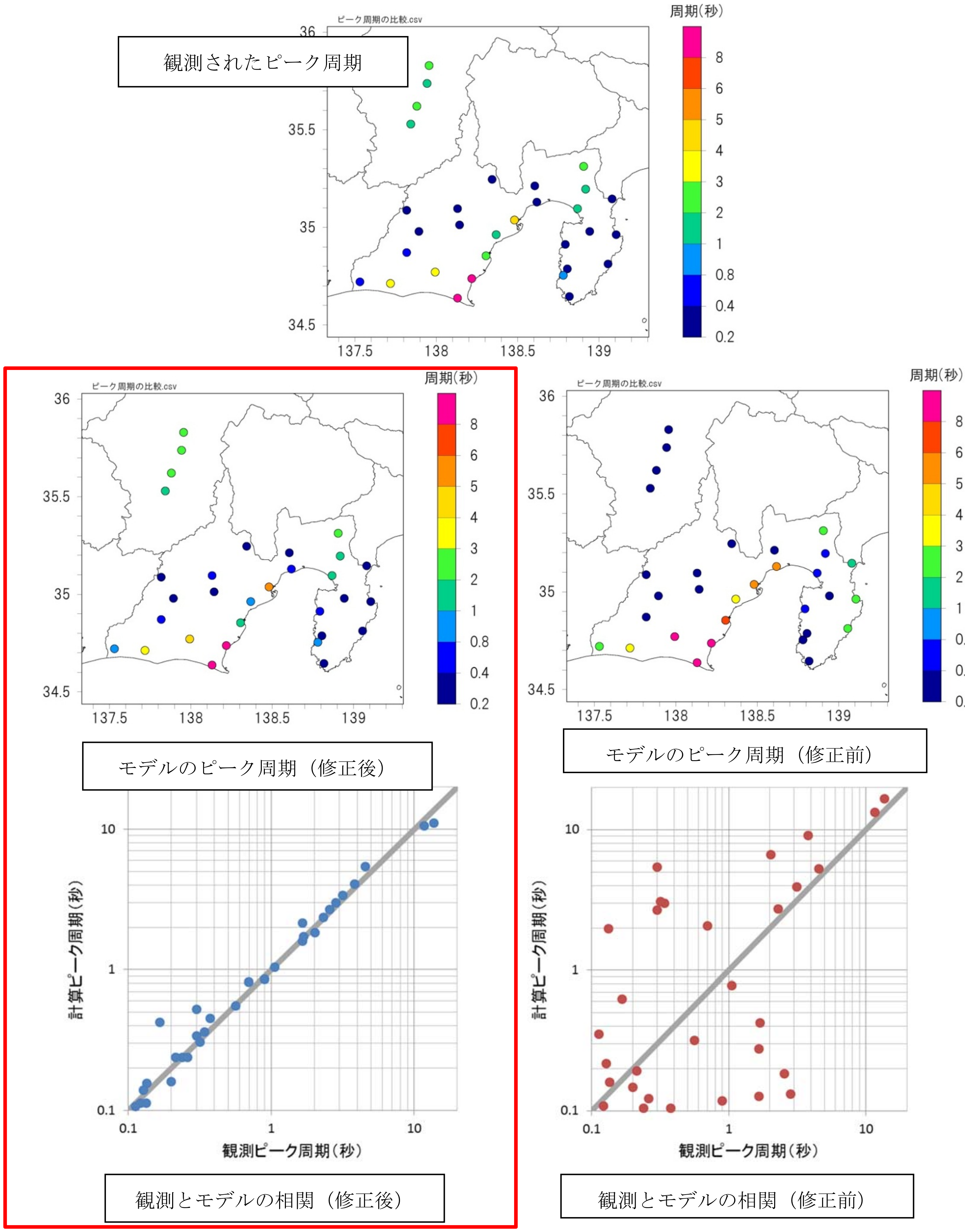
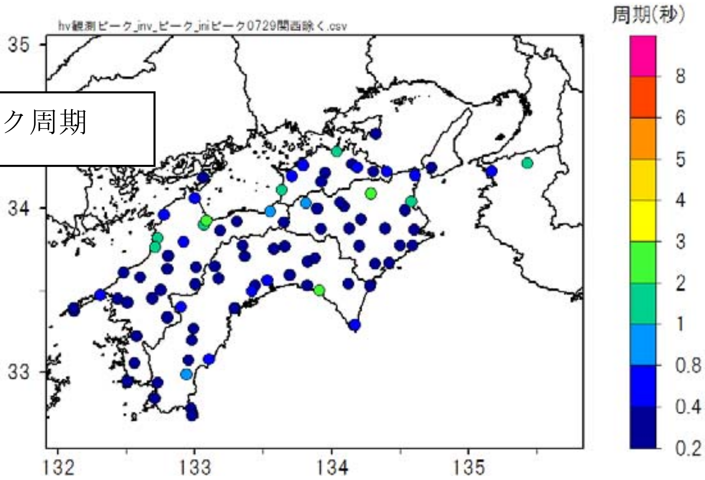


図３－２（２）．徳島県と香川県における修正前後のＨ／Ｖスペクトル

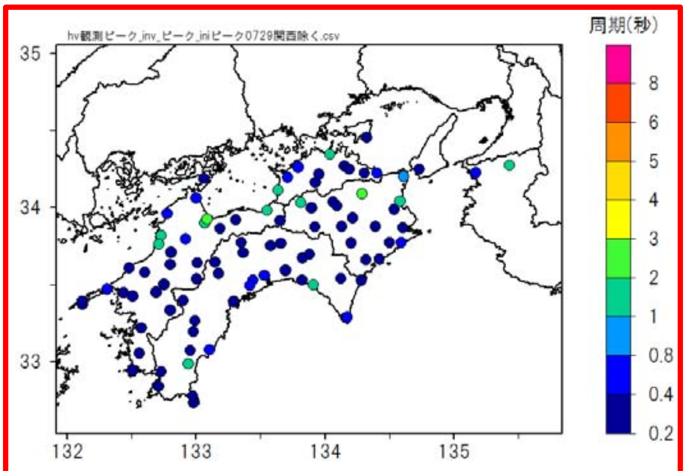


グラフの横軸：観測ピーク周期、縦軸：計算ピーク周期

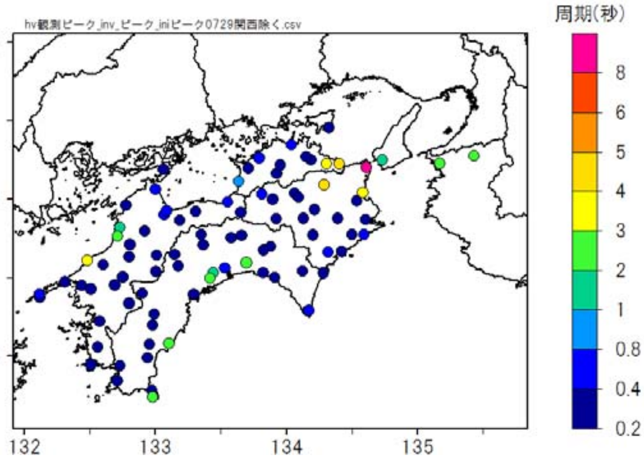
図３－３（１）．地盤構造のピーク周期の比較（静岡県）



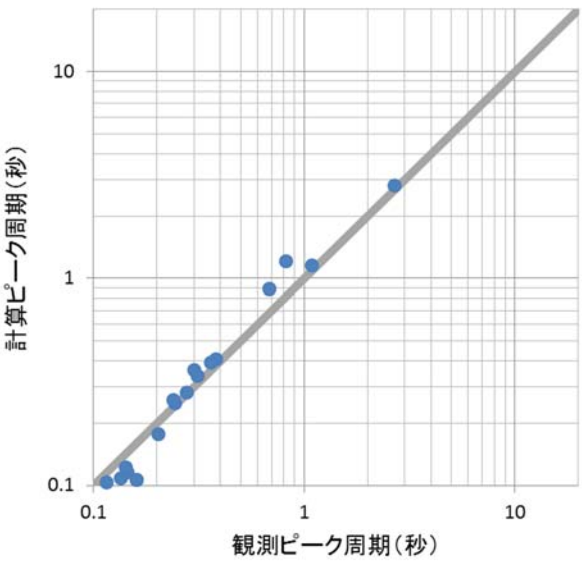
観測されたピーク周期



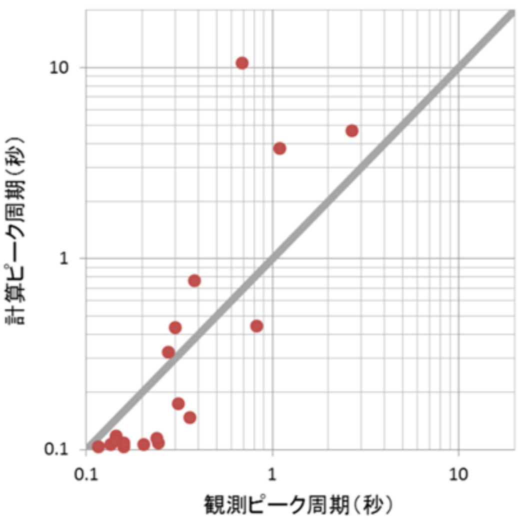
モデルのピーク周期（修正後）



モデルのピーク周期（修正前）



観測とモデルの相関（修正後）



観測とモデルの相関（修正前）

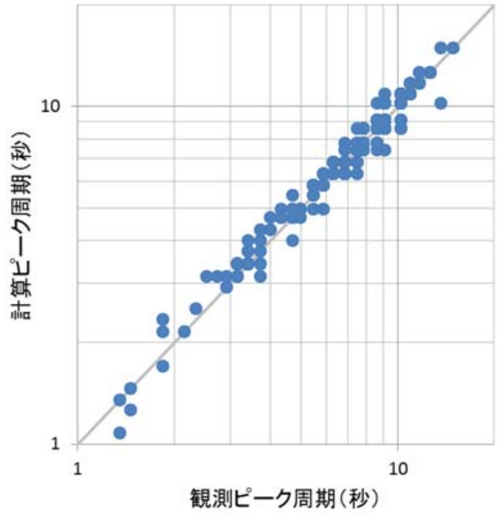
グラフの横軸：観測ピーク周期、縦軸：計算ピーク周期

図３－３（２）．地盤構造のピーク周期の比較（徳島県）

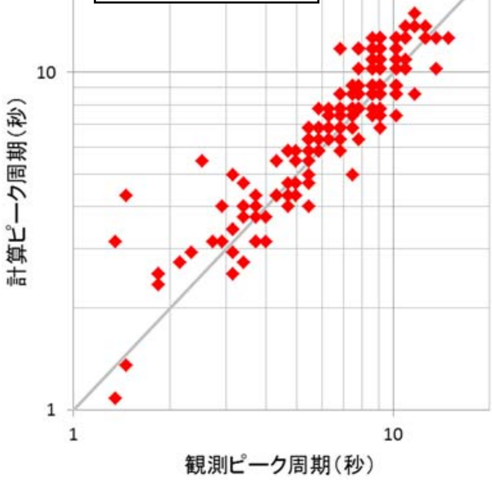
首都圏

（関東平野）

内閣府(2013)で修正



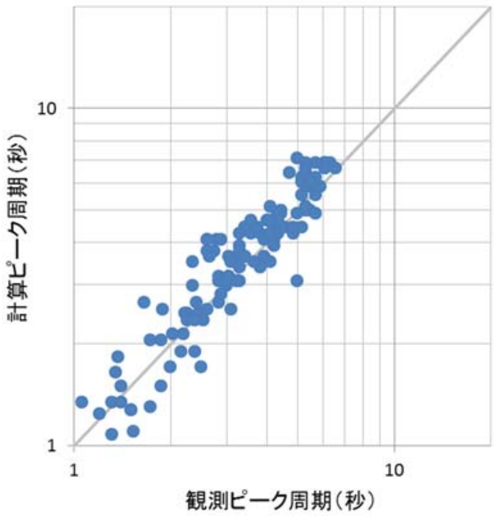
修正前



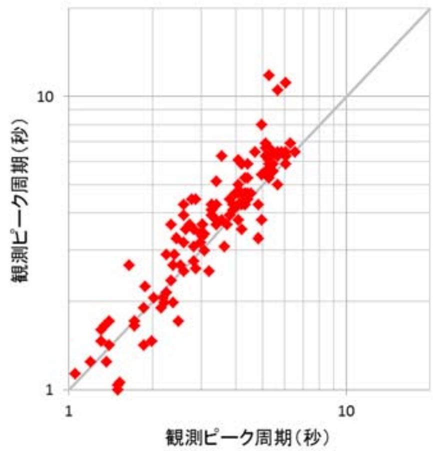
中部圏

（濃尾平野）

内閣府(2012)で修正



全国１次地下構造モデル



近畿圏

（大阪平野）

全国１次地下構造モデルから修正なし

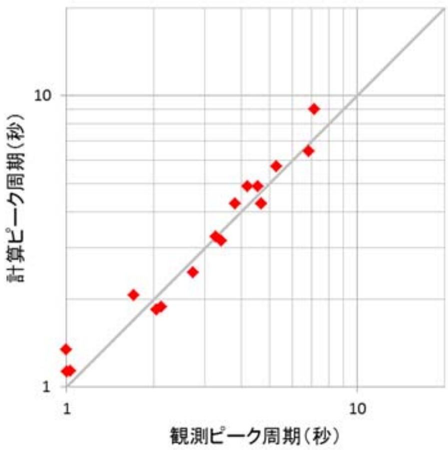
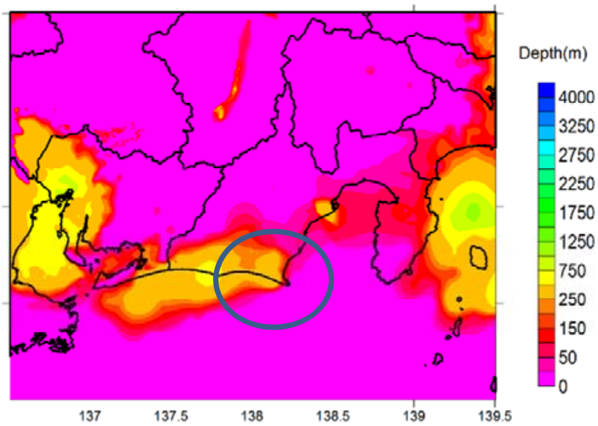


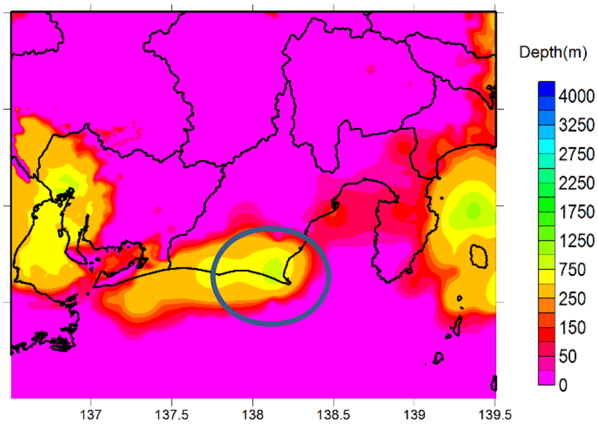
図３－３（３）　三大都市圏におけるピーク周期の比較（横軸：観測ピーク周期、縦軸：計算ピーク周期）

修正後（本検討）

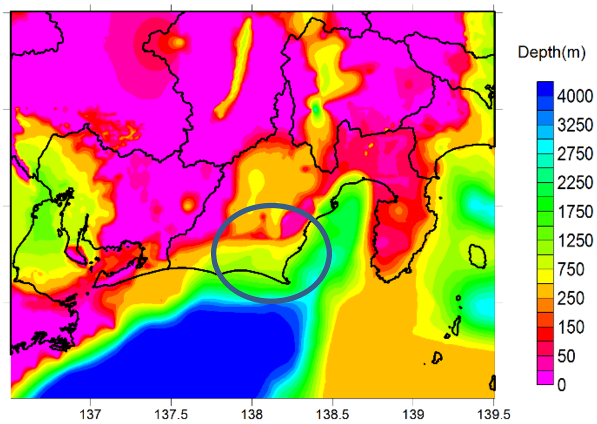
修正前



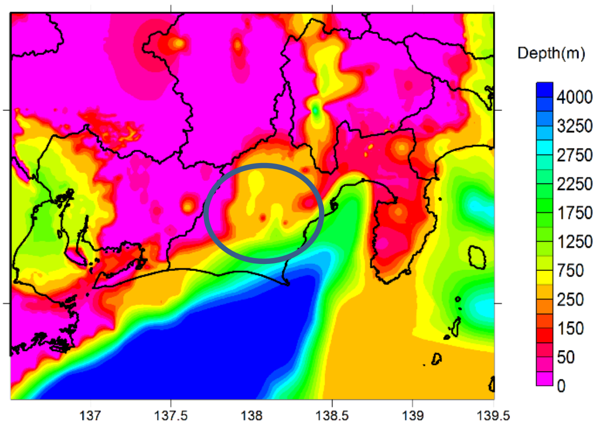
S 波速度 0.9km/s 層上面深度



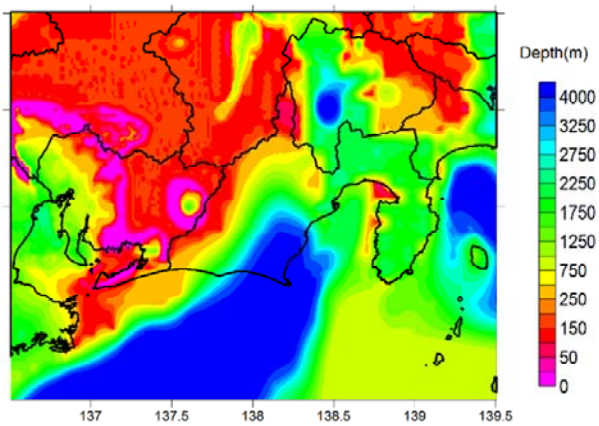
S 波速度 0.9km/s 層上面深度



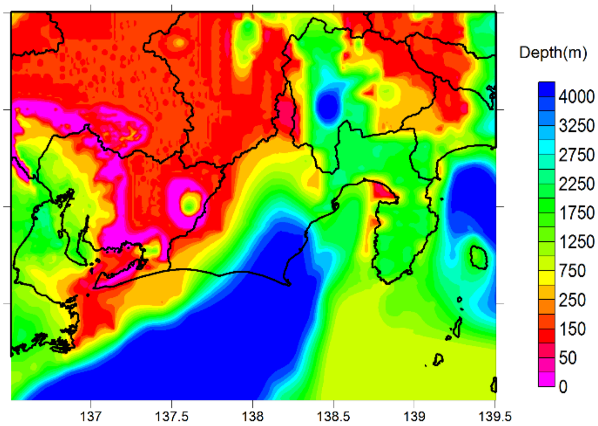
S 波速度 1.5km/s 層上面深度



S 波速度 1.5km/s 層上面深度



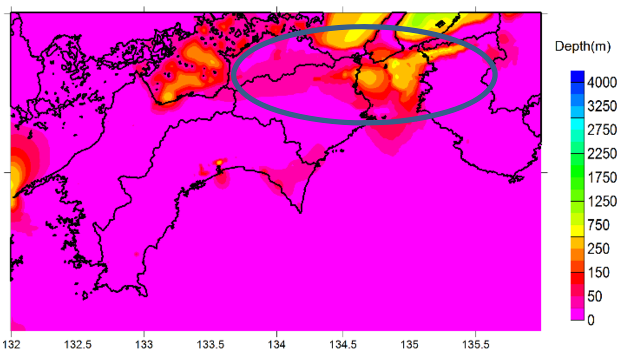
S 波速度 3.2km/s 層上面深度



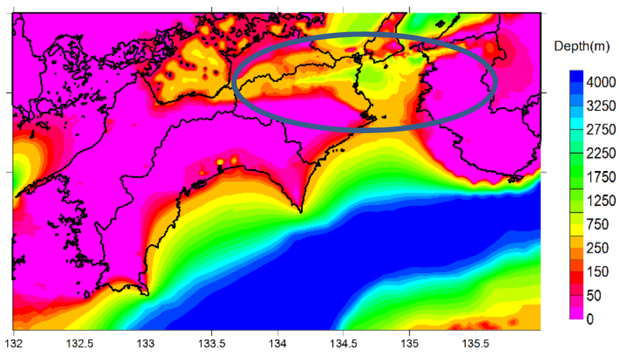
S 波速度 3.2km/s 層上面深度

図３－４（１）．地盤構造モデル修正前後の速度層上面深度分布

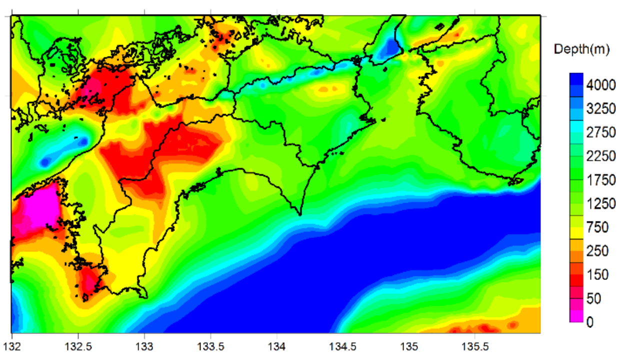
修正後（本検討）



S 波速度 0.9km/s 層上面深度

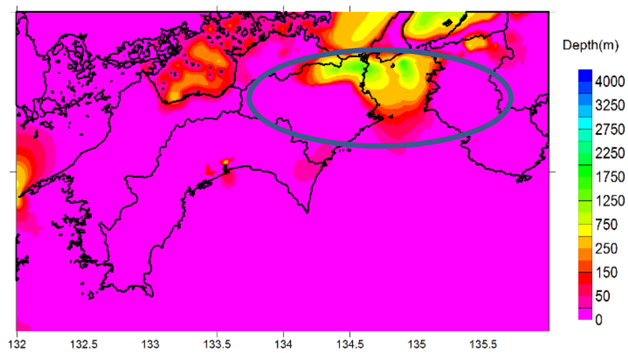


S 波速度 1.5km/s 層上面深度

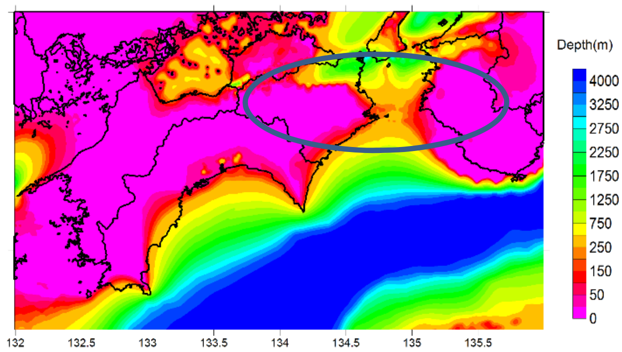


S 波速度 3.2km/s 層上面深度

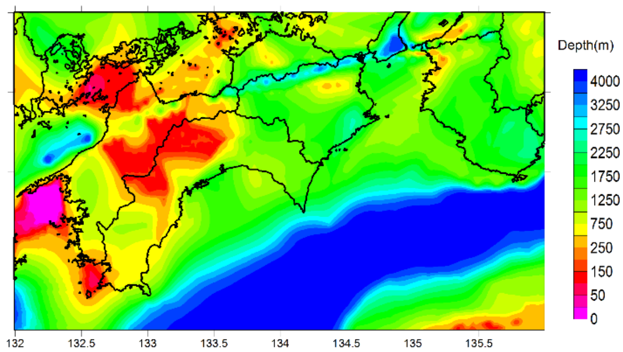
修正前



S 波速度 0.9km/s 層上面深度



S 波速度 1.5km/s 層上面深度



S 波速度 3.2km/s 層上面深度

左図：修正後（本検討）、右図：修正前（全国一次地下構造モデル）

図３－４（２）．地盤構造モデル修正前後の速度層上面深度分布

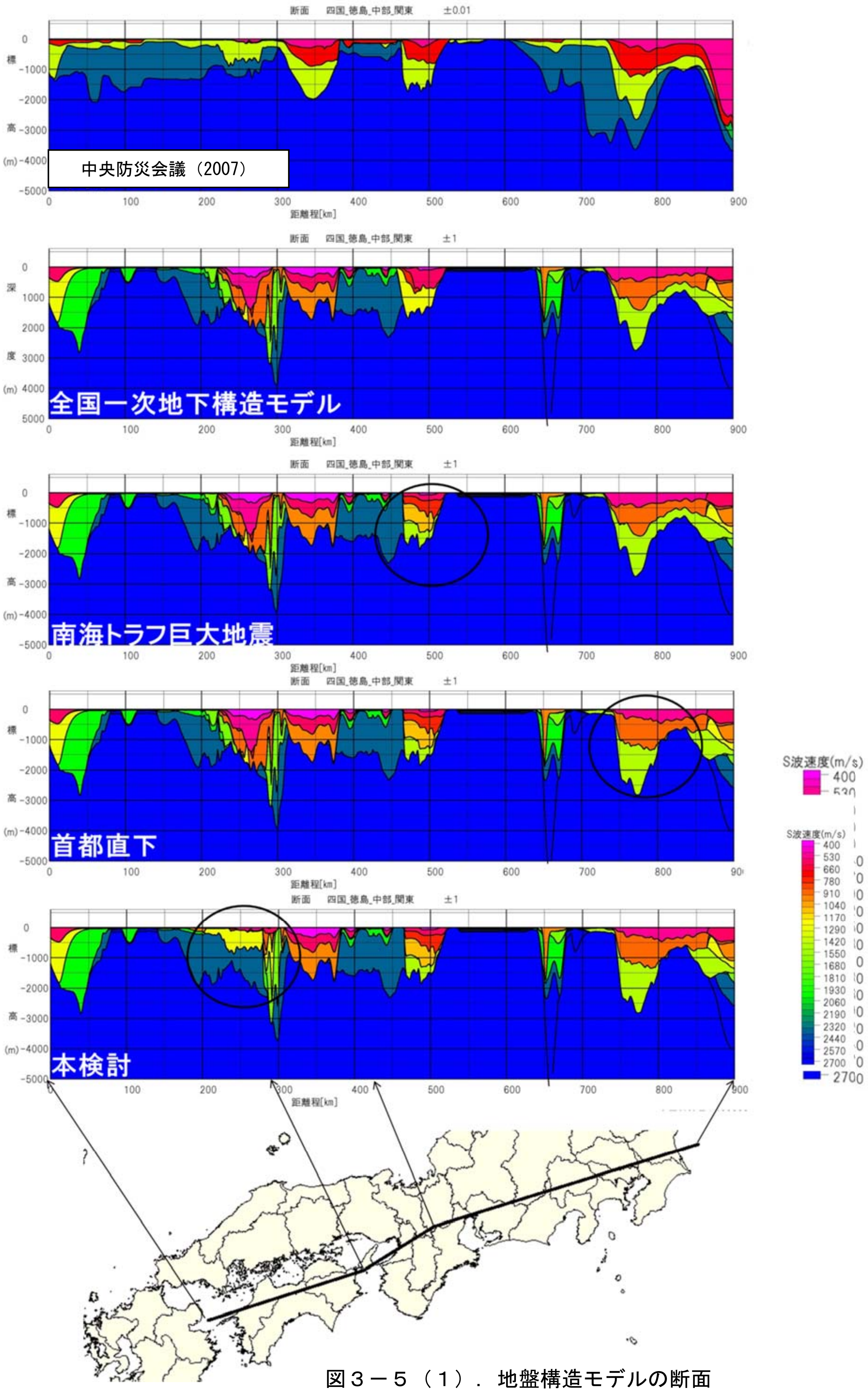


図３－５（１）．地盤構造モデルの断面

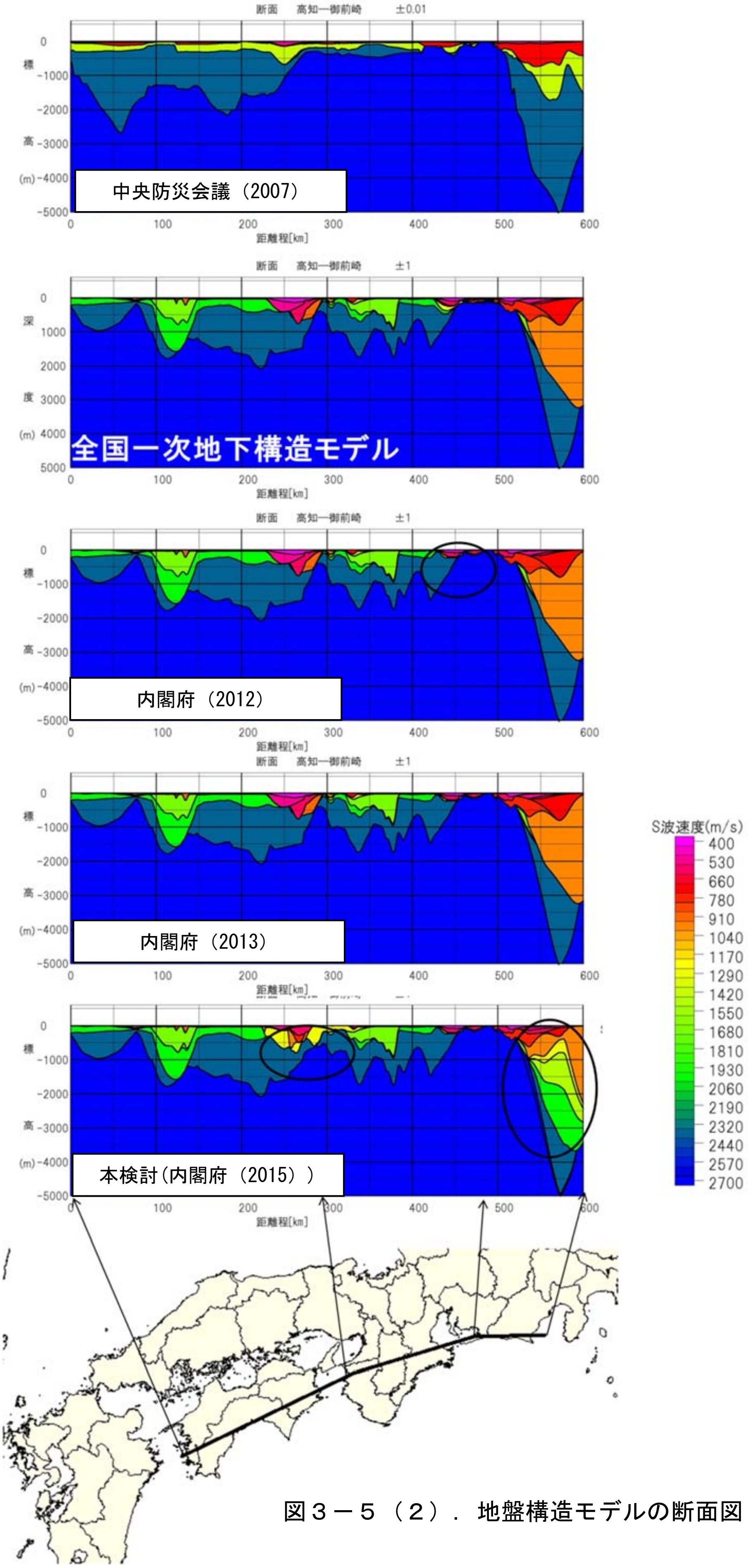


図３－５（２）．地盤構造モデルの断面図

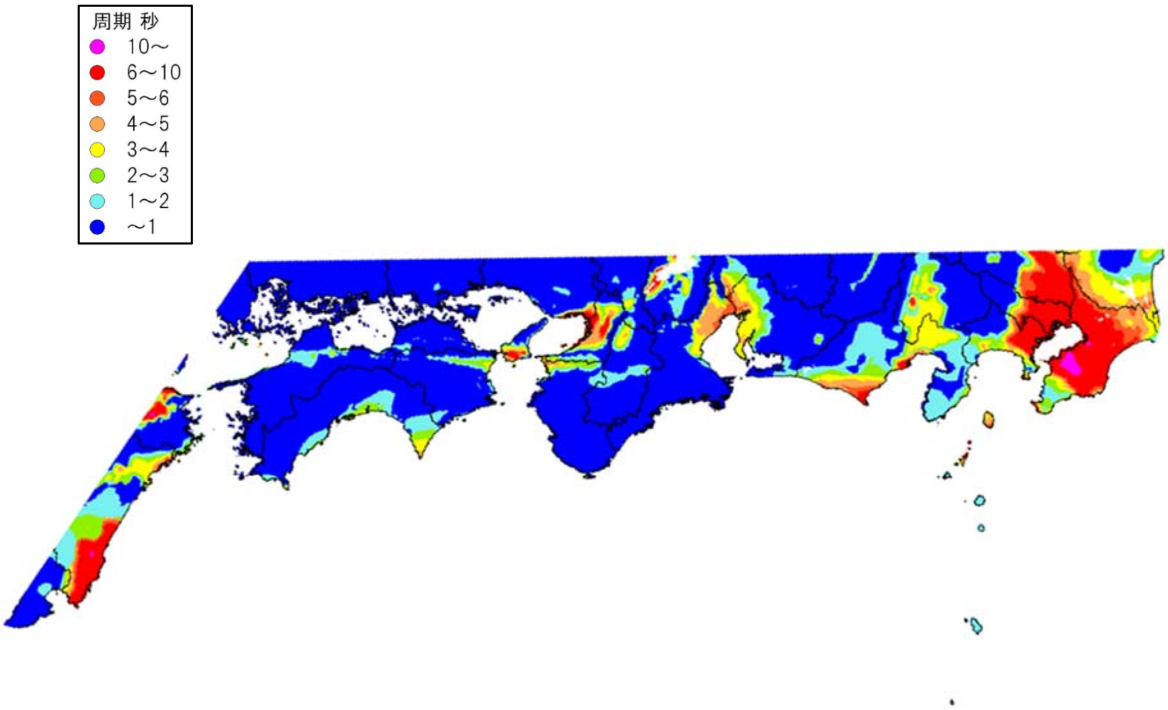


図３－６（１）．地盤モデルから算出した１次固有周期の分布

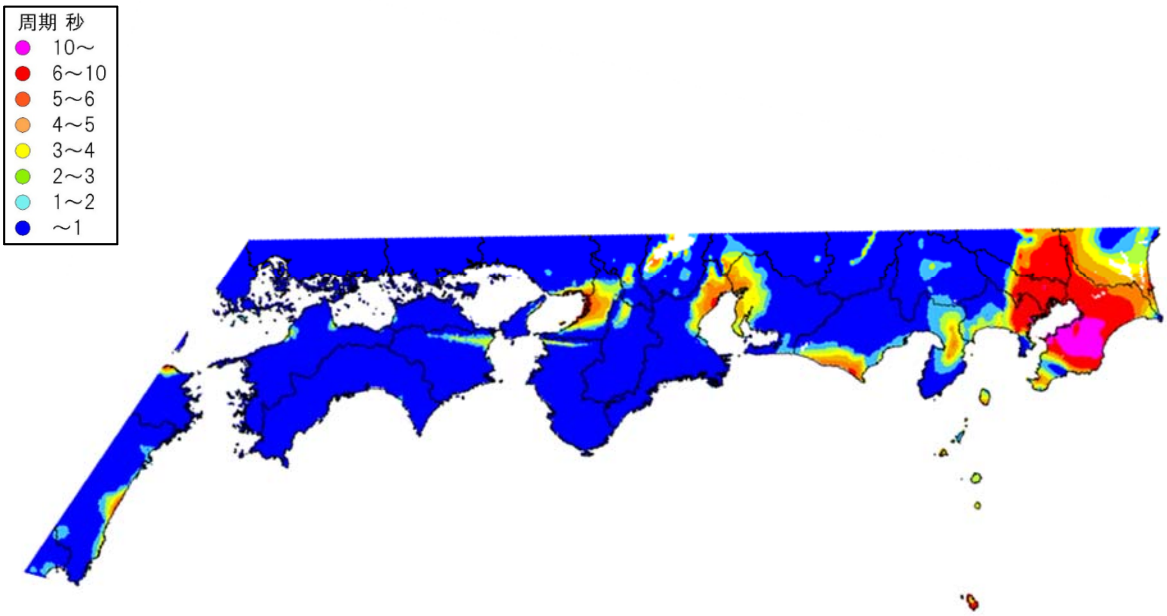


図３－６（２）．地盤モデルから算出した１次固有周期の分布（中央防災会議, 2006）

参考文献

1) Graves, R. W. : Simulating seismic wave propagation in 3D elastic media using staggered-grid finite differences , Bull. Seism. Soc. Am., Vol.86, pp.1091-1106, 1999.
2) Pitarka, A. : 3D elastic finite-difference modeling of seismic motion using staggered grids with mon-uniform spacing, Bull. Seism. Soc. Am., Vol.89, pp.54-68, 1999.
3) Aoi, S. and H. Fujiwara, : 3-D finite difference method using discontinuous grid, Bull. Seism. Soc. Am., Vol.89, pp.918-930, 1999.
4) Virieux, J. : *SH*-wave propagation in heterogeneous media : velocity-stress finite-difference method, *Geophysics,* Vol.49,pp.1933-1957, 1984.
5) Virieux, J. : *P-SV*-wave propagation in heterogeneous media : velocity-stress finite-difference method, *Geophysics,* Vol.51,pp.889-901, 1986.
6) Robbertson, J. O. A., J. O. Blanch and W. W. Symes, : Viscoelastic finite-difference modeling, Geophysics, Vol.59, pp.1444-1456, 1994.
7) Robbertson, J. O. A. : A numerical free-surface condition for elastic/viscoelastic finite-difference modeling in the presence of topography, Geophysics, Vol.61, pp.1921-1934, 1996.
8) 地震調査研究推進本部・「長周期地震動予測地図」2012 年試作版,全国 1 次地下構造モデル http://www.jishin.go.jp/main/chousa/12_choshuki/
9) 中央防災会議・東南海、南海地震等に関する専門調査会: 長周期地震動の卓越周期と深部地盤の固有周期（参考資料）, 2008.
10) 内閣府・南海トラフの巨大地震モデル検討会：南海トラフの巨大地震による震度分布・津波高について（第一次報告）,2012.
11) 内閣府・首都直下地震モデル検討会：首都直下のＭ７クラスの地震及び相模トラフ沿いのＭ８クラスの地震等の震源断層モデルと震度分布・津波高等に関する報告書, 2013.